2. *Шевченко Ю. И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

3. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении// Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 37. Калининград, 2006. С. 179—187.

I. Beschastnyi

CONNECTIONS ON A BUNDLE,
ASSOCIATED WITH DUAL PLANE DISTRIBUTION

In many-dimensional projective space a dual plane distribution is considered. A connection in a bundle associated with given distribution is introduced by Lumiste's way. It is proved, that the curvature object is a tensor, which contains four subtensors.

УДК 514.75

Н. В. Виноградова, О. В. Воротникова, М. В. Кретов

*(Балтийский федеральный университет им. И. Канта,
г. Калининград)*

ОБ ОДНОМ КОМПЛЕКСЕ ЭЛЛИПСОИДОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном аффинном пространстве продолжается исследование комплексов (трехпараметрических семейств) эллипсоидов. Получены геометрические свойства одного из подклассов рассматриваемого многообразия фигур.

Ключевые слова: эллипсоид, аффинное пространство, комплекс, многообразие, репер, система уравнений Пфаффа, фокальное многообразие, асимптотические линии, индикатриса вектора.

Исследование ведется в репере $R = \{ A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \},$ который характеризуется следующим образом: A — центр эллипсоида q, векторы $\bar{e}_i$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) направлены по тройке сопряженных диаметров эллипсоида, причем концы A_i векторов $\overline{e}_i$ лежат на эллипсоиде. При этом уравнение эллипсоида q имеет вид:

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - 1 = 0. \qquad (1)$$

В работе [1] исследованы комплексы K_3^0, в которых на эллипсоиде имеются по крайней мере три фокальные точки A_i, которые не лежат на одной прямой и на одной плоскости, проходящей через центр, и определяют три сопряженных направления, если прямая (AA_1) описывает цилиндрическую поверхность. Система уравнений Пфаффа этого многообразия имеет вид:

$$\begin{gathered}\omega_i^i = -\omega^i,\ \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0,\ \omega_2^1 = \alpha\omega^2 + \beta\omega^3, \\ \omega_3^1 = \beta\omega^2 + \gamma\omega^3,\ \omega_2^3 = \lambda\omega_3^2 - \omega^3, \\ \omega_3^2 = (\lambda b - 1)\omega^2 + b\omega^3,\end{gathered} \qquad (2)$$

где за базисные формы взяты ω^1, ω^2 и ω^3.

Двумерное многообразие точек A, являющееся поверхностью, касательная плоскость которой в точке A проходит через фокальные точки A_1 и A_2, назовем поверхностью Φ.

В данной работе рассматриваются комплексы K_3^{01}, выделенные из многообразия K_3^0, когда асимптотические линии на поверхности (A_1) являются координатными и при движении точки A по поверхности Φ касательная на индикатрисе вектора $\overline{e}_2$ параллельна плоскости $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$.

Обозначим асимптотические линии на поверхности (A_1), ассоциированной с комплексом K_3^{01}, символами γ_1 и γ_2, которые задаются соответственно следующими уравнениями: $\omega^2 = 0$, $\omega^3 = 0$.

Предложение 1. *Комплексы K_3^{01} существуют и определяются с произволом одной функции одного аргумента.*

Доказательство. В работе [1] найдены формулы:

$$
\begin{gathered}
d\overline{e}_1 = -\omega^1 \overline{e}_1, \\
d\overline{e}_2 = (\alpha\omega^2 + \beta\omega^3)\overline{e}_1 - \omega^2 \overline{e}_2 + (\lambda b - 1)(\lambda\omega^2 + \omega^3)\overline{e}_3, \\
d\overline{e}_3 = (\beta\omega^2 + \gamma\omega^3)\overline{e}_1 + ((\lambda b - 1)\omega^2 + b\omega^3)\overline{e}_2 - \omega^3 \overline{e}_3, \\
d\overline{A}_1 = \omega^2 \overline{e}_2 + \omega^3 \overline{e}_3, \\
d\overline{A}_2 = (\omega^1 + \alpha\omega^2 + \beta\omega^3)\overline{e}_1 + \lambda\omega_3^2 \overline{e}_3, \\
d\overline{A}_3 = (\omega^1 + \beta\omega^2 + \gamma\omega^3)\overline{e}_1 + b \quad (\lambda\omega^2 + \omega^3)\overline{e}_2,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

используя которые, находим уравнение асимптотических линий на поверхности (A_1), ассоциированной с комплексом K_3^0 :

$$
\alpha(\omega^2)^2 + 2\beta\omega^2\omega^3 + \gamma(\omega^3)^2 = 0. \tag{4}
$$

Из определения многообразия K_3^{01} следует, что

$$
\alpha = 0, \gamma = 0. \tag{5}
$$

Тогда в системе дифференциальных уравнений (2) имеем

$$
\omega_2^1 = \beta\omega^3, \omega_3^1 = \beta\omega^2. \tag{6}
$$

Замыкая уравнения (6), получим

$$
d \ln \beta = B\omega^3 + \omega^1 + \omega^2 - 2\lambda b\omega^2, \tag{7}
$$

где $B = 1 - 2\lambda b.$

Из формулы (3) и определения комплекса K_3^{01} следует:

$$
\lambda = 0. \tag{8}
$$

Тогда система дифференциальных уравнений Пфаффа исследуемого комплекса имеет вид:

$$
\begin{gathered}
\omega_i^i = -\omega^i, \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0, \omega_2^1 = \beta\omega^3, \omega_3^1 = \beta\omega^2, \\
\omega_2^3 = -\omega^3, \omega_3^2 = -\omega^2 + b\omega^3, d \ln \beta = \omega^1 + \omega^2 + \omega^3.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Чистое замыкание [2] системы уравнений (9) состоит из следующего уравнения:

$$
db \Lambda \omega^3 - 2b\omega^2 \Lambda \omega^3 = 0. \tag{10}
$$

Система уравнений (9, 10) в инволюции и ее решение определяется с произволом одной функции одного аргумента.

Предложение 2. *Комплекс* K_3^{01} *обладает следующими геометрическими свойствами:*

1) прямая $l=(A_2,\overline{e}_1)$ неподвижна;

2) при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_2 прямая $m=(A_1,\overline{e}_2)$ и координатная плоскость $(A,\overline{e}_1,\overline{e}_2)$ неподвижны, а векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ смещаются параллельно сами себе;

3) на поверхности (A_1) направление $\omega^2+\omega^3=0$ сопряжено направлению $\omega^2-\omega^3=0;$

4) поверхность (A_3) — цилиндрическая с образующей, параллельной прямой l, причем касательная к этой поверхности в точке A_3 параллельна координатной плоскости $(A,\overline{e}_1,\overline{e}_2)$;

5) точка $P=A_2-\beta\overline{e}_1$ неподвижна при движении точки A_1 по асимптотической линии γ_1 при $\omega^1=0;$

6) смещение точки A_3 при переходе с одной образующей цилиндрической поверхности (A_3) на другую происходит в направлении вектора $\overline{e}_2$.

Доказательство.

1) Имеем

$$\begin{aligned}
&d\overline{e}_1=-\omega^1\overline{e}_1,\\
&d\overline{e}_2=\beta\omega^3\overline{e}_1-\omega^2\overline{e}_2-\omega^3\overline{e}_3,\\
&d\overline{e}_3=\beta\omega^2\overline{e}_1+(-\omega^2+b\omega^3)\overline{e}_2-\omega^3\overline{e}_3.
\end{aligned}\tag{11}$$

Пусть $M_1=A_2+X^1\overline{e}_1$ — текущая точка прямой $l=(A_2,\overline{e}_1)$. Тогда

$$d\overline{M}_1=(dX^1-(1-X^1)\omega^1+\beta\omega^2)\overline{e}_1.\tag{12}$$

2) Пусть $M_2=A_1+X^2\overline{e}_2$ и $M_3=A+X^1\overline{e}_1+X^2\overline{e}_2$ — текущие точки соответственно прямой $m=(A_1,\overline{e}_2)$ и координатной плоскости $(A,\overline{e}_1,\overline{e}_2)$. Тогда из формул (3) получаем:

$$d\overline{M}_2 = \beta X^2\omega^3\overline{e}_1 + (dX^2 + (1 - X^2)\omega^2)\overline{e}_2 + (1 - X^2)\omega^3\overline{e}_3,$$

$$\begin{gathered} d\overline{M}_3 = (dX^1 + (1 - X^1)\omega^1 + \beta X^2\omega^2)\overline{e}_1 + \\ + (dX^2 + (1 - X^2)\omega^2)\overline{e}_2 + (1 - X^2)\omega^3\overline{e}_3. \end{gathered} \qquad (13)$$

При движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_2 формулы (13) принимают вид:

$$\begin{gathered} d\overline{M}_2 = (dX^2 + (1 - X^2)\omega^2)\overline{e}_2, \\ d\overline{M}_3 = (dX^1 + (1 - X^1)\omega^1 + \beta X^2\omega^2)\overline{e}_1 + \\ + (dX^2 + (1 - X^2)\omega^2)\overline{e}_2, \end{gathered} \qquad (14)$$

откуда следует неподвижность прямой m и координатной плоскости $(A, \overline{e}_1, \overline{e}_2)$ при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_2.

Из формул (3) непосредственно вытекает, что в многообразии K_3^{01} векторы $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ смещаются параллельно сами себе.

3) Из определения комплекса K_3^{01} следует, что асимптотические линии поверхности (A_1) задаются уравнением:

$$\omega^2\omega^3 = 0. \qquad (15)$$

Последнее уравнение равносильно следующему:

$$(\omega^2 + \omega^3)^2 - (\omega^2 - \omega^3)^2 = 0, \qquad (16)$$

откуда ясно, что направление $\omega^2 + \omega^3 = 0$ сопряжено направлению $\omega^2 - \omega^3 = 0$.

4) Имеем

$$d\overline{A}_3 = (\omega^1 + \beta\omega^2)\overline{e}_1 + b\omega^3\overline{e}_2. \qquad (17)$$

Уравнение асимптотических линий поверхности (A_2) принимает вид:

$$(\omega^3)^2 = 0. \qquad (18)$$

Из формул (17) и (18) следует, что поверхность (A_3) — цилиндрическая с образующей, параллельной прямой l, а касательная к этой поверхности в точке A_3 параллельна координатной плоскости $(\mathrm{A}, \overline{\mathrm{e}}_1, \overline{\mathrm{e}}_2)$.

5) Из формул (3) и (9) получаем

$$d\overline{P} = (\omega^1 - \beta\omega^2)\overline{e}_1, \tag{19}$$

откуда и следует соответствующее утверждение предложения.

6) Последнее утверждение предложения непосредственно следует из формулы (17).

Предложение 3. *Фокальное многообразие [3] эллипсоида q, ассоциированного с комплексом* K_3^{01}, *состоит только из трех точек* A_1, A_2 *и* A_3.

Доказательство. Фокальное многообразие эллипсоида q, ассоциированного с комплексом K_3^{01}, задается следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered}
(X^1)^2 - X^1 = 0, \\
(X^2)^2 - X^2 - \beta X^1 X^3 + X^2 X^3 = 0, \\
(X^3)^2 - X^3 - \beta X^1 X^2 + (1-b) X^2 X^3 = 0, \\
(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 - 1 = 0.
\end{gathered} \tag{20}$$

Системе уравнений (20) удовлетворяют только координаты точек A_1, A_2 и A_3, причем последняя точка является двукратной [4] фокальной точкой.

Список литературы

1. *Кретов М. В.* О комплексах центральных квадрик в аффинном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 11. Калининград, 1980. С. 51—60.

2. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

3. *Малаховский В. С., Махоркин В. В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном простран-

стве // Тр. геометрич. семинара / ВИНИТИ АН СССР. М., 1974. Т. 6. С. 113—133.

4. *Малаховский В. С.* Индуцировано оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве // Там же. С. 319—334.

N. Vinogradova, O. Vorotnikova, M. Kretov

ABOUT ONE COMPLEX OF ELLIPSOIDS IN AFFINE SPACE

In three-dimensional affine space research of complexes (three-parametric families) of ellipsoids proceeds. Geometrical properties of one of subclasses of considered diversity of figures are obtained.

УДК 514.75

С. Ю. Волкова

(Балтийский военно-морской институт им. Ф. Ф. Ушакова, г. Калининград)

НОРМАЛИЗАЦИЯ НОРДЕНА — ТИМОФЕЕВА РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ SH_m ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Дано задание гиперполосы SH_m в репере 1-го порядка, и доказана теорема существования [1]. Для гиперполосы SH_m внутренним образом присоединены: а) в дифференциальной окрестности 2-го порядка ее нормализация в смысле Нордена — Тимофеева; б) в дифференциальной окрестности 3-го порядка однопараметрический пучок ее оснащений в смысле Э. Картана.

Ключевые слова: регулярная гиперполоса, нормализация, фокальное многообразие, линейная поляра, квазитензор, оснащение.

1. Схема использования индексов такова:

$$J, K, L = \overline{1,n};\quad \bar{J}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0,n};\quad p, q, t = \overline{1,r};\quad a, b, c = \overline{r+1,m};$$